

Progressões Geométricas

Semelhantes às progressões aritméticas, as progressões geométricas são seqüências nas quais existe uma certa relação entre os termos. Mas, diferentemente das PAs em que somávamos o valor da razão a um termo para achar o próximo, numa PG o que fazemos é multiplicar a razão ao termo para achar o seu sucessor. Para diferenciar das PAs, notamos a razão da PG de **q**, ao invés de **r**.

Exemplos:	(2;4;8;16;32;64;128;...)	razão = 2	PG infinita e cresc.
	(-1;3;-9;27;-81)	razão = -3	PG finita e oscilante
	(100;10;0,1;0,01;0,001;...)	razão = 1/10	PG infinita e decresc.

Como já podemos notar pelos exemplos, o que define se a PG é crescente ou decrescente não é mais somente o sinal da razão (como nas PAs), mas sim o fato de a razão, sendo positiva, ser maior ou menor que 1.

q>1	PG crescente
q=1	PG constante (Ex: 3; 3; 3; 3; 3)
0<q<1	PG decrescente
q=0	PG nula (Ex: 69; 0; 0; 0; 0; 0; 0)
q<0	PG oscilante

Se chamarmos então de **a_n** o n-ésimo termo da progressão e de **q** a razão, poderemos chegar a algumas relações.

$$\begin{array}{l}
 a_2 = a_1 \cdot q \\
 a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
 a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
 a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4 \\
 a_n = a_1 \cdot q^{n-1}
 \end{array}
 \quad
 \boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q}$$

Se prestarmos atenção agora a alguns exemplos de PGs, notaremos que existe uma certa simetria com relação a um termo específico fixado, semelhante à observada nas PAs.

Exemplo: Numa PG de 10 termos cujo primeiro termo é 3 e a razão é -2, tomemos o 6 termo.

$$3 \quad -6 \quad 12 \quad -24 \quad 48 \quad -96 \quad \mathbf{192} \quad -384 \quad 768 \quad -1536$$

Se escolhermos agora qualquer dupla de termos que se encontrem à mesma distância do sexto termo notaremos que o produto dos termos da dupla é igual ao quadrado do sexto termo.

$$(-96) \cdot (-384) = 48 \cdot 768 = (-24) \cdot (-1536) = 192^2 = 36864$$

Se agora escolhermos outros exemplos e testarmos poderemos concluir que o produto de quaisquer dois termos equidistantes de um termo da PG é igual ao quadrado do termo em questão.

Demonstração: Dada uma PG qualquer e um termo fixado a_n qualquer. São então a_{n-k} e a_{n+k} um par de termos equidistantes de a_n .

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = (a_1 \cdot q^{n-k-1}) \cdot (a_1 \cdot q^{n+k-1})$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1 \cdot q^{n-k-1} \cdot a_1 \cdot q^{n+k-1}$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^2 \cdot q^{(n-k-1)+(n+k-1)}$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^2 \cdot q^{n-k-1+n+k-1}$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^2 \cdot q^{2n-2}$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^2 \cdot q^{2(n-1)}$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^2 \cdot (q^{n-1})^2$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = (a_1 \cdot q^{n-1})^2$$

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^2$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

Com o que conhecemos até agora a respeito de PGs podemos dizer então que o termo do meio é sempre a média geométrica dos termos ao seu redor.

Para calcular a soma dos n termos de uma progressão geométrica utilizamos a seguinte fórmula, demonstrada a seguir:

=> para um número finito de termos

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

Demonstração: Podemos dizer que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q - S_n = -a_1 + a_n \cdot q$$

$$S_n(q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q^1 - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1+1} - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

Quando estudamos progressões aritméticas infinitas nos parecia claro que só faz sentido tentar calcular a soma de um número finito de elementos, pois se quisermos calcular a soma de um número infinito de termos chegaremos a um valor também

infinito, positiva ou negativamente. No estudo de progressões geométricas a existência dessa nova classe de progressões decrescentes ($0 < q < 1$) nos permite o cálculo de infinitos termos. Para isso temos mais uma fórmula, cuja demonstração que também está exposta à frente exige alguns conceitos um pouco mais avançados de cálculo.

$$\Rightarrow \text{para um número infinito de termos} \quad \boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Exemplo: Dada uma PG infinita cujo primeiro termo é 100 e a razão $1/3$, qual a soma de todos os termos?

$$a_1 = 100$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{100}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{100}{\frac{3 - 1}{3}} = \frac{100}{\frac{2}{3}} = 100 \cdot \frac{3}{2} = 150$$

$$S = 150$$

Demonstração: A idéia que usaremos aqui é que, como a razão das progressões geométricas decrescentes é uma fração maior que zero e menor que 1, quando elevamos q ao expoente n o resultado tenderá a zero. Assim conseguimos calcular a soma para infinitos termos.

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot q^n) = a_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = a_1 \cdot 0 = 0$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \right) = \frac{0 - a_1}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

EXERCÍCIOS

1. Obter o 5º termo de uma PG na qual o 1º termo é -3 e a razão é 4.
2. Obter o 6º e o 7º termos da PG em que $a_1=2$ e $a_3=3$.
3. Determine o 1º termo de uma PG cujo 5º termo vale 40 e o 10º vale 1,25.
4. Quantos termos tem a PG em que o 1º termo é 2, a razão é 3 e o último termo é 13122?

5. Resolva a equação: $x + x/2 + x/4 + x/8 + x/16 + \dots = 100$.
6. (UFSC 1989) Numa PG de 6 termos a razão é 5. O produto do 1º termo com o último é 12500. Determine o valor do 3º termo. Obs.: Considere a PG de termos positivos.
7. (UFSC 1994) Na progressão geométrica (10, 2, 2/5, 2/25, ...) a posição do termo 2/625 é:
8. (UFSC 1995) Qual deve ser o número mínimo de termos da seqüência (-133, -126, -119, -112, ...) para que a soma de seus termos seja positiva?
9. Se (-2; x; -18) é uma PG, calcule x.
10. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da PG em que o termo geral da seqüência é igual $2^n - 2$ (sendo n pertencente aos Naturais).

RESPOSTAS	
1	768
2	15,1875 e 22,78125
3	640
4	8
5	$S = \{50\}$
6	50
7	6
8	38
9	$\{3; -3\}$
10	511