Progressões Geométricas

Semelhantes às progressões aritméticas, as progressões geométricas são seqüências nas quais existe uma certa relação entre os termos. Mas, diferentemente das PAs em que somávamos o valor da razão a um termo para achar o próximo, numa PG o que fazemos é multiplicar a razão ao termo para achar o seu sucessor. Para diferenciar das PAs, notamos a razão da PG de **q**, ao invés de **r**.

Exemplos:	(2;4;8;16;32;64;128;...)	razão = 2	PG infinita e cresc.
	(-1;3;-9;27;-81)	razão = -3	PG finita e oscilante
	(100;10;0,1;0,01;0,001;...)	razão = 1/10	PG infinita e decresc.

Como já podemos notar pelos exemplos, o que define se a PG é crescente ou decrescente não é mais somente o sinal da razão (como nas PAs), mas sim o fato de a razão, sendo positiva, ser maior ou menor que 1.

q>1	PG crescente
q=1	PG constante (Ex: 3; 3; 3; 3; 3)
0<q<1	PG decrescente
q=0	PG nula (Ex: 69; 0; 0; 0; 0; 0; 0)
q<0	PG oscilante

Se chamarmos então de $\mathbf{a_n}$ o n-ésimo termo da progressão e de **q** a razão, poderemos chegar a algumas relações.

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a \cdot q^4$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q}$$

Se prestarmos atenção agora a alguns exemplos de PGs, notaremos que existe uma certa simetria com relação a um termo específico fixado, semelhante à observada nas PAs.

Exemplo: Numa PG de 10 termos cujo primeiro termo é 3 e a razão é -2, tomemos o 6 termo.

3 -6 12 -24 48 -96 **192** -384 768 -1536

Se escolhermos agora qualquer dupla de termos que se encontrem à mesmo distância do sexto termo notaremos que o produto dos termos da dupla é igual ao quadrado do sexto termo.

$$(-96)\cdot(-384) = 48\cdot 768 = (-24)\cdot(-1536) = 192^2 = 36864$$

Se agora escolhermos outros exemplos e testarmos poderemos concluir que o produto de quaisquer dois termos eqüidistantes de um termo da PG é igual ao quadrado do termo em questão.

Demonstração: Dada uma PG qualquer e um termo fixado **a_n** qualquer. São então **a_{n-k}** e **a_{n+k}** um par de termos eqüidistantes de **a_n**.

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = (a_1 \cdot q^{n-k-1}) \cdot (a_1 \cdot q^{n+k-1})$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1 \cdot q^{n-k-1} \cdot a_1 \cdot q^{n+k-1}$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^{\,2} \cdot q^{(n-k-1)+(n+k-1)}$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^{\,2} \cdot q^{n-k-1+n+k-1}$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^{\,2} \cdot q^{2n-2}$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^{\,2} \cdot q^{2\cdot(n-1)}$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_1^{\,2} \cdot \left(q^{n-1}\right)^2$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = (a_1 \cdot q^{n-1})^2$$
$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^{\,2}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

Com o que conhecemos até agora a respeito de PGs podemos dizer então que o termo do meio é sempre a média geométrica dos termos ao seu redor.

Para calcular a soma dos n termos de uma progressão geométrica utilizamos a seguinte fórmula, demonstrada a seguir:

=> para um número finito de termos $\boxed{S_n = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} = \dfrac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}}$

Demonstração: Podemos dizer que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$
$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$
$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$
$$S_n \cdot q - S_n = -a_1 + a_n \cdot q$$
$$S_n(q-1) = a_n \cdot q - a_1$$
$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q^1 - a_1}{q-1}$$
$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1+1} - a_1}{q-1}$$
$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}$$

Quando estudamos progressões aritméticas infinitas nos parecia claro que só faz sentido tentar calcular a soma de um número finito de elementos, pois se quisermos calcular a soma de um número infinito de termos chegaremos a um valor também infinito, positiva ou negativamente. No estudo de progressões geométricas a existência dessa nova classe de progressões decrescentes (0<q<1) nos permite o cálculo de infinitos termos. Para isso temos mais uma fórmula, cuja demonstração que também está exposta à frente exige alguns conceitos um pouco mais avançados de cálculo.

=> para um número infinito de termos $\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$

Exemplo: Dada uma PG infinita cujo primeiro termo é 100 e a razão 1/3, qual a soma de todos os termos?

$$a_1 = 100$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{3}} = \frac{100}{\frac{3-1}{3}} = \frac{100}{\frac{2}{3}} = 100 \cdot \frac{3}{2} = 150$$

$$S = 150$$

Demonstração: A idéia que usaremos aqui é que, como a razão das progressões geométricas decrescentes é uma fração maior que zero e menor que 1, quando elevarmos q ao expoente n o resultado tenderá a zero. Assim conseguimos calcular a soma para infinitos termos.

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}$$

$$\lim_{n->\infty}(a_n \cdot q) = \lim_{n->\infty}(a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q) = \lim_{n->\infty}(a_1 \cdot q^n) = a_1 \cdot \lim_{n->\infty}(q^n) = a_1 \cdot 0 = 0$$

$$S = \lim_{n->\infty}\left(\frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}\right) = \frac{0-a_1}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

EXERCÍCIOS

1. Obter o 5° termo de uma PG na qual o 1° termo é -3 e a razão é 4.

2. Obter o 6° e o 7° termos da PG em que a_1=2 e a_3=3.

3. Determine o 1° termo de uma PG cujo 5° termo vale 40 e o 10° vale 1,25.

4. Quantos termos tem a PG em que o 1° termo é 2, a razão é 3 e o último termo é 13122?

5. Resolva a equação: x + x/2 + x/4 + x/8 + x/16 + ... =100.

6. (UFSC 1989) Numa PG de 6 termos a razão é 5. O produto do 1º termo com o último é 12500. Determine o valor do 3º termo. Obs.: Considere a PG de termos positivos.

7. (UFSC 1994) Na progressão geométrica (10, 2, 2/5, 2/25, ...) a posição do termo 2/625 é:

8. (UFSC 1995) Qual deve ser o número mínimo de termos da seqüência (-133, -126, -119, -112, ...) para que a soma de seus termos seja positiva?

9. Se (-2; x; -18) é uma PG, calcule x.

10. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da PG em que o termo geral da seqüência é igual $2^n - 2$ (sendo n pertencente aos Naturais).

RESPOSTAS	
1	768
2	15,1875 e 22,78125
3	640
4	8
5	S={50}
6	50
7	6
8	38
9	{3; -3}
10	511