Progressões Aritiméticas

Progressões aritméticas são seqüências nas quais, a partir do segundo, cada termo é o resultado da soma do anterior com um valor fixo, que chamamos de razão.

Exemplos:	(2;5;8;11;14;17;20;...)	razão = 3	* PA infinita
	(-1;9;19;29)	razão = 10	
	(100;25;-50;-125;-200)	razão = -75	
	(3;2,5;2;1,5;1)	razão = -0,5	

Se chamarmos então de **a_n** o n-ésimo termo da progressão e de **r** a razão, poderemos chegar a algumas relações.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$
$$a_5 = a_1 + 4r$$
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\boxed{a_n - a_{n-1} = r}$$

Se prestarmos atenção agora a alguns exemplos de PA, notaremos que existe uma certa simetria com relação a um termo específico fixado.

Exemplo: Numa PA de 10 termos cujo primeiro termo é 3 e a razão é 5, tomemos o 6 termo.

3 8 13 18 23 **28** 33 38 43 48

Se escolhermos agora qualquer dupla de termos que se encontrem à mesmo distância do sexto termo notaremos que a soma dos termos da dupla é igual ao dobro do sexto termo.

$$23+33=18+38=13+43=8+48=2\cdot 28=56$$

Se agora escolhermos outros exemplos e testarmos poderemos concluir que a soma de quaisquer dois termos eqüidistantes de um termo da PA é igual ao dobro do termo em questão.

Demonstração: Dada uma PA qualquer e um termo fixado **a_n** qualquer. São então **a_{n-k}** e **a_{n+k}** um par de termos eqüidistantes de **a_n**.

$$a_{n-k} + a_{n+k} = [a_1 + (n-k-1)\cdot r] + [a_1 + (n+k-1)\cdot r]$$
$$a_{n-k} + a_{n+k} = a_1 + (n-k-1)\cdot r + a_1 + (n+k-1)\cdot r$$
$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_1 + (n-k-1+n+k-1)\cdot r$$
$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_1 + (2n-2)\cdot r$$
$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_1 + 2\cdot(n-1)\cdot r$$
$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2\cdot[a_1 + (n-1)\cdot r]$$
$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$$

Com o que conhecemos até agora a respeito de PAs podemos dizer então que o termo do meio é sempre a média aritmética dos termos ao seu redor. Divagando um pouco mais sobre o assunto não é difícil supor que a soma de todos os termos de uma PA então pode ser calculada como a média aritmética dos seus extremos multiplicada pelo número de termos da PA. Pense no assunto!

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n}$$

Demonstração: Podemos dizer que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ...$$

Como todos os termos entre parênteses são duplas de termos eqüidistantes do "centro" da PA, então são todos iguais, sendo que são, agrupados dois a dois, n/2 termos.

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

EXERCÍCIOS

1. Obter o 5º termo de uma PA onde o 1º termo é -3 e a razão é 4.

2. Obter o 6º e o 7º termos da PA em que a_1=2 e a_3=8.

3. Determine o 1º termo e de uma PA cujo 5º termo vale 10 e o 10º vale 5.

4. Quantos termos tem a PA onde o 1º termo é 3, a razão é 13 e o último termo é 146?

5. Mostre que se (a;b;c) é uma progressão aritmética, então b=(a+c)/2.

6. Determinar o número de x sabendo que a seqüência (3x+2 ; x-1 ; 2x+3) é uma progressão aritmética.

7. Uma PA tem três termos e a soma deles vale 30. Sabendo que a soma dos quadrados dos dois primeiros termos dessa PA vale 125, determine essa PA.

8. Obter a soma dos 50 primeiros termos da PA (2; -1; -4; ...).

9. Calcular a soma dos termos da PA finita (2; 5; 8; ...; 59).

10. Calcular a soma dos 10 primeiros termos da PA em que o termo geral da seqüência é igual 4n-3 (sendo n pertencente aos Naturais).

11. (UFSC 1996) A soma dos múltiplos de 10 compreendidos entre 1 e 1995 é:

01. 198000 02. 19500 04. 199000 08. 1991010 16. 19900

12. (UFSC 1997) A soma dos 10 primeiros termos de uma PA na qual o primeiro termo é igual à razão e a3 + a8 = 18 é:

RESPOSTAS	
1	13
2	17 e 20
3	14 e -1
4	12
5	demonst.
6	-7/3
7	5;10;15 ou -5;10;25
8	-3575
9	610
10	190
11	04
12	90